YTÜ

FEN-EDB. FAKÜLTESİ

FİZİK BÖLÜMÜ

BİTİRME TEZİ

Kuantum Fiziğinde Bazı Örnek Problem Çözümleri

Mustafa Rabuş
2000

YARARLANILAN KAYNAKLAR :

1. Kuantum Mekaniğine Giriş, (Prof. Dr. Bekir Karaoğlu)
2. Kuvantum Problem Çözümleri Kitabı, (Prof. Dr. Emine Rızaoğlu-İ.Ü. Fen. Fak.)
3. Kuvantum Mekaniği, (Prof Dr. Çetin Cansoy- İ.Ü. Fen. Fak.)
4. Modern Fizik, (Taylor-Zafaritos)
5. Fizikte Matematik Yöntemler, (Prof. Dr. Bekir Karaoğlu)
6. Mathematical Handbook, (Schaum Series-Mc Graw Hill)

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
Önsöz	3
Giriş	4
I. "Işığın Kuantalanması" problemleri	5
II. "Madde Dalgaları" problemleri	10
III. "Schrödinger Denklemi" problemleri	17
IV. "Kuyu Potansiyelleri" problemleri	23
V. "Kuantum Mekaniğinin Genel Formalizmi" problemleri	30
Yararlanılan Kaynaklar	48

GİRİŞ

Bu çalışma kuantum mekaniğine giriş niteliğinde olan konuların bazı örnek problemleri ve çözümlerinden oluşmaktadır. Bu konular beş başlık altında toplanmıştır.

I. Işığın Kuantalanması
II. Madde Dalgası
III. Scrödinger Denklemi
IV. Potansiyel Kuyular
V. Kuantum Mekaniğinin Genel Formalizmi

I. Işığın Kuantalanması :
Bu başlık altında Max Planck'ın ışık kuantları tezine öncülük etmiş olan "kara cisim ışıması" olayından başlayarak "fotoelektrik olay" (A. Einstein), "Compton Olayı" (Compton), "Alfa Saçılması" ve atom modeli (E. Rutherford), atom spektrumlarının kuantal açıklanması (N. Bohr), madde dalgası kavramı (L. deBroglie) olaylarına örneklik edecek bazı problemler ve çözümleri yer almaktadır.

II. Madde Dalgası :
Compton olayı ışığın kuantal, Lois deBroglie ile ışığın dalga hareketi gözlenmektedir. Ve buradan dalga parçacık ikilemi gündeme gelmektedir. İşte bu kuantum mekaniğinin başlangıç noktasını oluşturmakta gerekli olan dalga denklemleri, dalga paketi, dalga paketinin hareketini ifade eden fourier seri açılımı, fourier integrali ve de son olarak belirsizlik ilkesinin bazı pratik örneklere uygulamalarını içeren problemler ele alınmıştır.

III. Schrödinger Denklemi :
Scrödinger dalga denklemi kuantum mekaniğinin bel kemiğini oluşturmaktadır. Bu denklemin kullanıldığı olasılık yorumu, dalga fonksiyonun normlanması, olasılık korunumu, beklenen değer, dirakdelta fonksiyonu ve de bazı operatörlerin kullanım uygulamalarını içeren problemler bu başlık altında ele alınmıştır.

IV. Potansiyel Kuyular :
Schrödinger denkleminin atomik boyuttaki uygulamalarını içeren potansiyel kuyuları ve bunlara dair hesaplamalar ve de harmonik salınıcı uygulamalarına bazı örnek problemler ve çözümleri gösterilmiştir.

V. Kuantum Mekaniğinin Genel Formalizmi :
Kuantum mekaniği en baştan beri bir kendisine yeni bir formalizm oluşturmaya başlamıştır. Öncelikle Newton hareket denklemine karşın Schrödinger dalga denklemi kurulmuştur. Ve kuantum mekaniğinin daha karmaşık problemlerinde işlemleri kolaylaştıracak, bazı ilişkileri daha kolay görmemize yarayacak bir formalizm gelişmiştir.

İşte bu başlık altında bu özel matematik yöntemlere örneklik teşkil edecek problemler ve çözümleri gösterilmektedir.

Not : Problemlerin çözümleri tamamen bu bitirme çalışmasının hazırlayıcısı olan öğrenciye aittir. Dolayısıyla problemler hakkında yapılan yorumlar da öğrenciye ait olup uzman bir insanın çalışması olarak değerlendirilmemelidir.

1.IŞIĞIN KUANTALANMASI

Soru 1.1 :
Sıcaklığı 5000K olan bir kara cisim en çok hangi dalga boyunda ışıma yapabilir.
Çözüm :

Spektral dağılım fonksiyonu (u(ν)) grafiğinde λ_{max} olan bölgenin altındaki alan MAXİMUM dur.

Yani, λ_{max} dalga boyu ışınımın en yoğun olduğu bölgeyi ifade eder. Öyleyse;

λ_{max} .T = 2,9.10^{-3} mK : Wien yer değiştirme yasası

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}9.10^{-3}\,mK}{5000K} = 0.58.10^{-8}\text{m} = 5800\ \text{Å}$$

Soru 1.2 :
Bir nükleer patlamada sıcaklık bir anda 10^7 K olabilmektedir. Maksimum radyasyonun hangi dalga boyunda gelebileceğini bulunuz.

Çözüm 1.2 :

Maksimum radyasyon, sıcaklığın maksimum olduğu anda yayınlanır. Bu; toplam ışıma enerjisi $(u(\nu))$ eğrisinin altındaki alan olarak tanımlanırsa yine *wien yer değiştirme* formülünden

$$\lambda_{max}\,.\,T = 2{,}9.10^{-3}\ \text{mK} \rightarrow \lambda_{max} = \frac{2{,}9.10^{-3}\,mK}{10^7\,K} = 2{,}9\ \text{Å}$$

Soru 1.3 :
Kobalt elementinden bir elektron koparmak için 3,9 eV enerji gerekir. **(a)** λ=5890 Å olan sarı ışıkta fotoelektrik olay gerçekleşir mi ? **(b)** Kobalt için eşik dalga boyu ne kadardır.

Çözüm 1.3 :
(a) Enerji korunumundan faydalanılır. Gelen fotonun enerjisi > İş fonksiyonu ⇒

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E= \frac{6{,}62.10^{-34}\, j.s.3.10^{8}\, m/s}{1{,}6.10^{-19}\,\frac{j}{eV}.5890.10^{-10}} = 2{,}1eV < (W = 3{,}9eV)$$

ise fotoelektrik olay gerçekleşmez.

b) W= $\frac{hc}{\lambda_{esik}}$ olmalı ise ;

$$\lambda_{esik} = \frac{6{,}62.10^{-34}\, j.s.2{,}99793.10^{-8}\, m/s}{3{,}9eV.1{,}6.10^{-19}\, j/eV} = 3{,}180.10^{-7}\, m = 3180\dot{A}$$

Soru 1.4 :
Çinkonun iş fonksiyonu 4,24 eV dur. Dalgaboyu 2000Å olan bir ışın çinko üzerine düşürülüyor. **(a)** Eşik dalgaboyu ne kadardır? **(b)** Koparılan elektronların maksimum kinetik enerjileri ne olur? **(c)** Düşen radyasyonun ışıma gücü 3.0 W/m² ise 1m² alana 1 saniyede düşen faton sayısı ne kadardır.?

Çözüm 1.4 :

a) $W = \frac{hc}{\lambda_{esik}} = \frac{6{,}62.10^{-34}\, j.s.2{,}99793.10^{8}\, m/s}{\lambda_{esik}} = 4.24eV$

$$\lambda_{esik} = \frac{12403{,}9.10^{10}\, meV}{4{,}24eV} = 2926 \text{ Å}$$

b) Enerji korunumundan ; $\frac{hc}{\lambda} = W + E_k$ yazarak

$$\frac{12403{,}9.10^{-10}\, meV}{2000.10^{-10}\, m} = 4{,}24eV + E_k \rightarrow E_k = 1{,}96 \text{ eV}$$

sonucunu buluruz

c) Işıma gücü = 3,0. $\frac{W}{m^2} = 3{,}0\frac{J}{sn}\frac{1}{m^2}$ ise

Tanecik sayısı = $\dfrac{3{,}0\dfrac{J}{sn}\dfrac{1}{m^2}.1sn.1m^2}{E_{foton}} = \dfrac{3.0J}{\dfrac{hc}{\lambda}} = \dfrac{\dfrac{3.0J}{1{,}6.10^{-19}\,j/eV}}{\dfrac{12412{,}5.10^{-10}meV}{2000.10^{-10}m}} = 3.10^{18}$ adet

---

Soru 1.5 :
Dalgaboyu 0.80Å olan bir foton ardarda iki serbest elektronla çarpışmaya uğruyor. Foton birinci çarpışmada 60° ve ikincide 53° sapıyor. Fotonun son dalgaboyu ne kadardır ?

Çözüm 1.5 : Compton saçılma denklemi: dλ = $\dfrac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$ ise

$$d\lambda_1 = \frac{h}{m_e c}.(1-\cos\theta_1) = \frac{6{,}62.10^{-34}\,js}{9{,}11.10^{-31}kg.3.10^{8}\,m/s}.(1-\cos 60) = 0{,}0121\dot{A}$$

$\lambda' = \lambda + d\lambda_1$ = 0.80 Å + 0,0121 Å = 0,8121 Å : ilk saçılma sonucu

$$d\lambda_2 = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta_2) = \frac{6{,}62.10^{-34}\,j.s.}{9{,}11.10^{-31}kg.3.10^{8}\,m/s}(1-\cos 53) = 0.0096$$

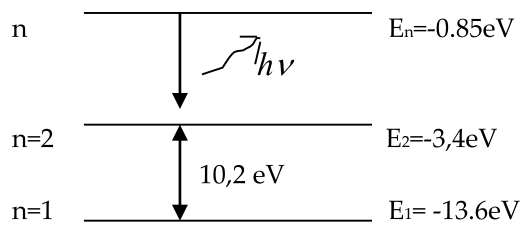
$\lambda'' = \lambda' + d\lambda_2$ = 0,8121 + 0,0096 = 0,8217Å : ikince saçılma sonucu

---

Soru 1.6 :
Bağlama enerjisi (yani serbest hale geçmek için gerekli enerjisi) 0.85 eV olan bir enerji seviyesinde bulunan bir elektron, uyarılma enerjisi (yani, taban durumu ile bu durum arasındaki enerji farkı) 10.2 eV olan bir duruma geçiş yapıyor. **(a)** Bir enerji diagramında bu olayı gösterin **(b)** Yayınlanan fotonun dalga boyunu bulun.

Çözüm 1.6 *:*

a)



b) Bağlanma enerjisi daha düşük olan bir yörüngeden daha yüksek bağlanma enerjili bir alt yörüngeye inilmiştir. Yani , kinetik enerjisi azalmış ve bu enerji farkı foton olarak yayınlanmıştır.

$$\Delta E = E_n - E_2 = 2{,}55eV = \frac{hC}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{6{,}62.10^{-34}\,j.s.3.10^{8}\,m/s}{2{,}55eV.1{,}6.10^{-19}\,j/eV} = 4868\,\text{Å}$$

Soru 1.7 :
Taban durumundaki bir Hidrojen atomu 18.0 eV enerjili bir foton soğuruyor. Serbest kalan elektronun hızını bulun.

Çözüm 1.7 :
Taban durumundaki hidrojen atomu elektronunun enerjisi

$$E_n = E_1 = -13{,}6eV \text{ ise } E_K = 18{,}0eV - 13{,}6eV = 4{,}4eV$$
$$E_k = \frac{1}{2} m_e V_e^2 = 4{,}4eV$$

E_K kinetik enerjisinin bağlanma enerjinin aşılması için kullanılan enerjinin artakalanından oluşur.

$$V_e = \sqrt{\frac{8{,}8eV.1{,}6.10^{-19}\,j/eV}{9{,}11.10^{-31}kg}} = 1{,}24.10^6 \text{ m/s}$$

Soru 1.8 :
Taban durumundaki bir hidrojen atomuna düşen bir foton, atomu iyonlaştırıyor. Serbest kalan elektron, ilk uyarılmış durumunda bulunan başka bir hidrojen iyonuna (yani, protona) rastlayıp bağlı duruma geçiyor ve bu sırada dalga boyu 466Å olan bir foton yayınlıyor. **(a)** Elektronun serbest durumda iken enerjisi ne kadardır ? **(b)** ilk fotonun enerjisi ne kadardır ?

Çözüm 1.8 :
a) $E_e^{serbest} = E_{foton}^1 - 13{,}6$ eV = $E_{foton}^2 - 13{,}6$ eV

$$E_{foton}^2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.10^{-34}\,js.3.10^8\,m/s}{466.10^{-10}m.1{,}6.10^{-19}\,j/eV} = 26{,}6eV$$

b) $E_{foton}^1 = E_{foton}^2 = 26{,}6eV$ olmalıdır.

Soru 1.9 :
20 kV luk bir katot tüpünde hızlandırılmış elektronların de Broglie dalga boyunu hesaplayın.

Çözüm 1.9 :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e q_e V(volt)}}$$: De Broglie dalgaboyu

$$\lambda = \frac{6{,}62.10^{-34}\,j.s}{\sqrt{2.9{,}11.10^{-31}kg.1{,}6.10^{-19}c.20.10^3 eV.1{,}6.10^{-19}\,j/eV}}$$

λ=0,0217m

Soru 1.10 :
20°C de ortalama termal enerjiye sahip nötronların de Broglie dalgaboyu ne olur ? (Not: T sıcaklığında ortalama termal enerji $\frac{3}{2}k_B T$ kadardır)

Çözüm1.10 : $E_{ort}^{T} = \frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2}.1,38.10^{-23}\,jk^{-1}(20+273)K = 605,51.10^{-23}\,j$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_n E_{ort}^{T}}}$: De Broglie dalga boyu

$$\lambda = \frac{6,62.10^{-34}\,js}{\sqrt{2.1,67.10^{-27}.606,51.10^{-23}\,j}} = 0,147 \text{ nm}$$

2.Madde Dalgaları

Soru 2.1 :

Bir dalga paketinin grup ve faz hızları arasında

$$V_g = V_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

bağıntısı olduğunun gösterin

Çözüm 2.1 :

$V_g = \dfrac{dw}{dk}$ ve $w = v_f k$ ve de $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \rightarrow dk = \dfrac{-2\pi}{\lambda^2} d\lambda$

$$v_g = \frac{d}{dk}(v_f k) = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\left[\frac{dV_f}{d\lambda}\frac{2\pi}{\lambda} - V_f 2\pi \frac{d}{d\lambda}(\lambda^2)\right]$$

$V_g = V_f - \lambda \dfrac{dV_f}{d\lambda}$ olarak bulunur.

Soru 2.2 :

Derin suda oluşan dalgaların faz hızı

$$\upsilon_f = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}} = \frac{sabit}{\sqrt{\lambda}}$$

bağıntısıyla verilmiştir. Suda oluşan dalga paketinin grup hızı ifadesinin bulun.

Çözüm 2.2 :

$V_g = V_f - \lambda \dfrac{dV_f}{d\lambda}$ yukarıda bulunmuştu.

$V_f = \sqrt{\dfrac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}} = \dfrac{sbt}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{A}{\sqrt{\lambda}}$ ise

$$V_g = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} - \lambda \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\lambda A}{2}\frac{1}{\lambda^{3/2}} = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\frac{3}{2}$$

Soru 2.3 :

Serbest bir parçacık için relativistik enerji bağıntısı $E = mc^2$ kullanıldığında grup ve faz hızları arasında

$$\upsilon_f = \frac{c^2}{\upsilon_g}$$

bağıntısı olduğunu gösterin. Parçacık için $\upsilon_g < c$ olduğuna göre $\upsilon_f > c$ oluşunun fiziksel bir anlamı var mıdır ?

Çözüm 2.3 : $V_f = \dfrac{w(k)}{k}$ ve $V_g = \dfrac{dw}{dk}$

Ve de ; $E = \hbar w \rightarrow w = \dfrac{E}{\hbar}$ ve $P = \hbar k \rightarrow k = \dfrac{p}{\hbar}$ biliniyorsa

$$V_f V_g = \frac{w}{k}\frac{dw}{dk} = \frac{E/\hbar}{P/\hbar}.\frac{dE}{dP} = \frac{E}{P}\frac{dE}{dP} = \frac{E}{P}\frac{d}{dP}\left(\frac{P^2}{2m}\right)$$

$$V_f.V_g = \frac{E}{P}\frac{P}{m} = \frac{mc^2}{m} = c^2 \rightarrow V_f = \frac{c^2}{V_g}$$ olarak bulunur.

V_g : Gurup hızı<c : Işık hızı olduğu belirli olduğuna göre

$V_f = \dfrac{C^2}{V_g}$>c sonucu çıkar. V_f tanımından bilindiği gibi dalga paketi içerisindeki bir noktanın çizgisel hızıdır. Ancak, sadece bir tanımlamadır ve fiziksel bir anlamı yoktur.

Soru 2.4 :

Bir iletken kanal içindeki elektromagnetik dalgaların dalgaboyu ile frekansı arasında

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0{}^2}}$$

bağıntısı vardır. Burada c ışık hızı, ν_0 sabit bir karakteristik frekanstır. Bu dalgaların faz ve grup hızları ne olur ?

Çözüm 2.4 :

$$V_f = \frac{w(k)}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu = c\sqrt{\frac{\nu^2}{\nu^2 - \nu_0^2}}$$ bulunur.

(2.3) sorusunun sonucu olan $V_g = \dfrac{c^2}{V_f}$ ifadesinden de

$$V_g = \frac{c^2}{V_f} = c\sqrt{\frac{\nu^2 - \nu_0^2}{\nu^2}}$$ olarak bulunur

---

Soru 2.5 :

[-a,a] aralığında tanımlanan aşağıdaki fonksiyonların Fourier seri açılımını hesaplayın:

a) f(x)=x, **b)** f(x)=|x|, **c)** $f(x) = e^{-a|x|}$

Çözüm 2.5 :

a) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}\right]$ **:** forier seri tanımı

$a_0 = c_0 \quad a_n = c_{-n} + c_n \quad b_n = i(c_{-n} - c_n)$

$C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx\psi(x)e^{-in\pi x/a}$ tanımlarını kullanırsak ;

$$C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx x e^{-in\pi x/a} = \frac{1}{2a}\left[x e^{-in\pi x/a}\frac{-a}{in\pi}\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a}\left(\frac{-a}{in\pi}\right)e^{-in\pi x/a}dx\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2a}\left[a e^{-in\pi a/a}\frac{-a}{in\pi} + a e^{in\pi a/a}\frac{-a}{in\pi} + \frac{a}{in\pi}\left(\frac{-a}{in\pi}e^{-in\pi a/a}\right)\Big|_{-a}^{a}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2a}\left[\frac{-a^2}{in\pi}(e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}(e^{-in\pi} - e^{in\pi})\right]$$

$$C_n = +\frac{ai}{n\pi}\left(\frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{2}\right) + \frac{ai}{n^2\pi^2}\left(\frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{2i}\right) = \frac{ai}{n\pi}Cosn\pi + \frac{ai}{n^2\pi^2}Sinn\pi$$

$CosX = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad SinX = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ kullanıldı.

n=0 değeri için tanımsızlık olduğu için limit kullanacağız.

$$\lim_{n\to 0} ai\left(\frac{n\pi\cos n\pi + \sin n\pi}{n^2\pi^2}\right) = \lim_{n\to 0} ai\frac{(\pi\cos n\pi - n\pi^2\sin n\pi + \pi\cos n\pi)}{2n\pi^2} =$$

$$\lim_{n\to 0} ia\left(\frac{-\pi^2\sin n\pi - (\pi^2\sin n\pi + n\pi^3\cos n\pi) - \pi^2\sin n\pi}{2\pi^2}\right) \to 0 \;=\; C_0 = a_0$$

$$a_n = C_{-n} + C_n = ai\left[\left(\frac{n\pi\cos n\pi + \sin n\pi}{n^2\pi^2}\right)\Big|_{n=-n} + \left(\frac{n\pi\cos n\pi + \sin n\pi}{n^2\pi^2}\right)\Big|_{n=n}\right]$$

$$a_n = ai\left[\frac{-n\pi\cos n\pi - \sin n\pi}{n^2\pi^2} + \frac{n\pi\cos n\pi + \sin n\pi}{n^2\pi^2}\right] = 0$$

$$b_n = i[C_{-n} - C_n] = -a\left[\frac{-n\pi\cos n\pi - \sin n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{n\pi\cos n\pi - \sin n\pi}{n^2\pi^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2a}{n^2\pi^2}(n\pi\cos n\pi + \sin n\pi) = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{a} + b_n\sin\frac{n\pi x}{a}\right] = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\left(-\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots\right)$$

b) $$C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}dx\,\psi(x)e^{-in\pi x/a} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}dx|x|e^{-in\pi x/a}$$

$$C_n = \frac{1}{2a}\left[\int_{-a}^{a}-xe^{-in\pi x/a}dx + \int_{0}^{a}xe^{-in\pi x/a}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[e^{in\pi}\left(\frac{a^2}{n^2\pi^2} + \frac{a^2}{in\pi}\right) - \frac{a^2}{n^2\pi^2} + e^{-in\pi}\left(\frac{a^2}{n^2\pi^2} - \frac{a^2}{in\pi}\right) - \frac{2a^2}{n^2\pi^2}\right]$$

$$= \frac{a}{n^2\pi^2}\left[\frac{e^{in} + e^{-in}}{2} + \left(\frac{e^{in} - e^{-in}}{2i}\right)n\pi - 1\right]$$

$$C_n = \frac{a}{n^2\pi^2}(\cos n\pi + n\pi\sin n\pi - 1)$$

$$\lim_{n\to 0} C_n \to \frac{a}{2} = C_0 = a_0$$

$$a_n = C_{-n} + C_n = \frac{a}{n^2\pi^2}(2\cos n\pi + 2n\pi\sin n\pi - 2)$$

$$a_n = \frac{2a}{n^2\pi^2}(\cos n\pi + n\pi\sin n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & n = 2,4,6 \\ \dfrac{-4a}{n^2\pi^2} & n = 1,3,5 \end{cases}$$

$$b_b = i(C_{-n} - C_n) = 0$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{a} + b_n\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$f(x) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$f(x) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{a} + \cdots\right)$$

Soru 2.6 :

Aşağıdaki fonksiyonların Fourier transformunu hesaplayın :

a) $f(x)=\begin{cases} x & |x|<1 \ ise \\ 0 & |x|\geq 1 \ ise \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} |x| & |x|<1 \ ise \\ 0 & |x|\geq 1 \ ise \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \ ise \\ 0 & |x|\geq 1 \ ise \end{cases}$

Çözüm 2.6 :

$\phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi(x)e^{-\mathbf{ikx}}$: $\psi(x)$ 'in forier transformu

a) $\phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty} dxf(x)e^{-\mathbf{ikx}}=\int_{-\infty}^{-1} dx.0.e^{\mathbf{-ikx}}+\int_{-1}^{1} dx.x.e^{-\mathbf{ikx}}+\int_{1}^{\infty} dx.0.e^{\mathbf{-ikx}}$

$$=0+\left[\left(x.e^{-\,\mathrm{ikx}}\frac{-1}{ik}\right)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} e^{-\,\mathrm{ikx}}\left(\frac{-1}{ik}\right)\right]+0$$

$$=\frac{i}{k}\left[\left(e^{-ik}+e^{ik}\right)-\left(e^{-ikx}\frac{i}{k}\right)\Big|_{-1}^{1}\right]=\frac{i}{k}\left[\left(e^{-ik}+e^{ik}\right)-\left(e^{-ik}-e^{+ik}\right)\frac{i}{k}\right]$$

$$\phi(k)=\frac{2i}{k}\left(\frac{e^{-ik}+e^{ik}}{2}\right)-\frac{2i}{k^2}\left(\frac{e^{ik}-e^{-ik}}{2i}\right)=2i\left(\frac{\cos k}{k}-\frac{\sin k}{k^2}\right)$$

b) $\phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty} dxf(x)e^{-ikx}=\int_{-\infty}^{-1} 0+\int_{-1}^{1}|x|e^{-ikx}dx+\int_{1}^{\infty} 0=\int_{-1}^{0}-xe^{-ikx}dx+\int_{0}^{1} xe^{-ikx}dx$

$$=\left[\left(-xe^{-ikx}\frac{-1}{ik}\right)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0} e^{-ikx}\left(\frac{-1}{ik}\right)dx\right]+\left[\left(xe^{-ikx}\frac{-1}{ik}\right)\Big|_{0}^{2}-\int_{0}^{1} e^{-ikx}\left(\frac{-1}{ik}\right)dx\right]$$

$$=\frac{i}{k}\left[e^{ik}+\left[e^{-ikx}\frac{i}{k}\right]_{-1}^{0}\right]+e^{-ik}+\left[e^{-ikx}\frac{i}{k}\right]_{0}^{1}$$

$$\phi(k)=\frac{2i}{k}\cos k-\frac{2}{k^2}\sin k=2i\left(i\frac{\cos k}{k}+\frac{\sin k}{k^2}\right)$$

c) $\phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty} dxf(x)e^{-ikx}=\int_{-\infty}^{-1} 0+\int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-ikx}dx+\int_{1}^{\infty} 0$

$$\phi(k)=\int_{-1}^{1}e^{-ikx}dx-\int_{-1}^{1}|x|e^{-ikx}dx=\frac{i}{k}\left(e^{-ik}-e^{ik}\right)-\left(\frac{2i}{k}\cos k-\frac{2}{k^2}\sin k\right)$$

$$\phi(k)=\frac{2}{k}\left(\sin k-i\cos k+\frac{1}{k}\sin k\right)=\frac{2}{k}\sin k\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{2i}{k}\cos k$$

Soru 2.7 :

Genlik dağılımı $\phi(k)=e^{-b|k|}$ olan dalga fonksiyonunun $\varphi(x)=\dfrac{b}{\pi}\dfrac{1}{x^2+b^2}$

Olduğunu gösterin

Çözüm 2.7 :

$\psi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\phi(k)e^{ikx}$ denkleminden faydalanacağız.

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-b|k|}e^{ikx}=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{k(b+ix)}}{2\pi}dk+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{k(-b+ix)}}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi(b+ix)}e^{k(b+ix)}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2\pi(-b+ix)}e^{k(-b+ix)}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2\pi(b+ix)}(1-0)+\frac{1}{2\pi(-b+ix)}(0-1)$$

$$\psi(x)=\frac{-b+ix-(b+ix)}{2\pi(-b^2-x^2)}=\frac{+2b}{2\pi(b^2+x^2)}=\frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2}$$

Soru 2.8 :

Gauss dalga paketi

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}}e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$$

nin Fourier transformu $\phi(k)$ nın da yine bir Gauss dağılımı oluşturduğunu gösterin.

Çözüm 2.8 :

$\phi(k)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi(x)e^{-ikx}$ genlik dağılım fonksiyonu tanımı ise $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}}=a,\quad \dfrac{+1}{2\Delta^2}=b$ olarak tanımlamalar yaparak ara işlemleri kolaylaştırırız.

$$\phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,ae^{-bx^2}.e^{ikx}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,a.e^{-b\left(x-\frac{ik}{2b}\right)^2+\frac{k^2}{4b^2}}$$

$x-\frac{ik}{2b}=u \quad \rightarrow \quad du=dx$ ise ve e^{bx^2} ifadesi her zaman çift fonksiyon ise,

$$\phi(k)=ae^{\frac{k^2}{4b^2}}.2.\int_0^\infty e^{-bu}du=\left(2ae^{\frac{k^2}{4b^2}}\frac{e^{-bu}}{-b}\right)\Bigg|_0^\infty=2ae^{\frac{k^2}{4b^2}}\left(0+\frac{1}{b}\right)$$

$$\phi(k)=\frac{2a}{b}e^{\frac{k^2}{4b^2}}=2\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}}.\frac{2\Delta^2}{1}e^{\frac{1}{4}k^2 4\Delta^4}=2\frac{\sqrt{2\pi\Delta^2}}{\pi}e^{k^2\Delta^2}$$

ise $\phi(k)$ bir gauss dağılımı oluşturmaktadır.

Soru 2.9 :

Kararsız bir elementer parçacık olan π^+ mezonunun yarıömrü $2{,}6.10^{-8}s$ ve durgun enerjisi $E_0=mc^2=140MeV$ dir.

a) Bu parçazığın durgun enerji değerindeki bağıl hatayı $(\Delta E/E)$ bulun.

b) Bu işlemi, durgun enerjisi 765 MeV ve yarıömrü $4{,}4.10^{-24}s$ olan ρ mezonu için tekrar edin

Çözüm 2.9 :

a) $\Delta E.\Delta t=\frac{\hbar}{2} \rightarrow \Delta E=\frac{\hbar}{2\Delta t}=\frac{1{,}054.10^{-34}js}{2.2{,}6.10^{-8}s}=0{,}20.10^{-26}s$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{0{,}20.10^{-26}j}{140.10^6 1{,}6.10^{-19}j}=893.10^{-19}$$

b) $\Delta E=\frac{\hbar}{2\Delta t}=\frac{1{,}054.10^{-34}js}{2.4{,}4.10^{-24}s}=0{,}12.10^{-10}j$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{0{,}12.10^{-40}j}{765.10^6 1{,}6.10^{-19}j}=980.10^{-10}j$$

Soru 2.10 :

Δ parçacığının durgun enerjisi 1236 MeV olup standart sapması 120 MeV dir. Bu parçacığın yarıömrü en az ne kadar olabilir ?

Çözüm 2.10 :

Standart sapma bize enerjisindeki belirsizliği ifade eder.

$$\Delta E.\Delta t=\frac{\hbar}{2} \rightarrow \Delta t=\frac{\hbar}{2\Delta E}=\frac{1{,}054.10^{-34}js}{120.10^6 1{,}6.10^{-19}j}=5{,}5.10^{-24}s$$

3.SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

Soru 3.1 :

$\left[-a,+a\right]$ aralığında $\psi(x)=A\left(Cos\frac{\pi x}{a}+1\right)$ dalga fonksiyonu veriliyor.

a) Bu fonksiyonu normlayın

b) $\Delta x\ ve\Delta p$ belirsizliklerini hesaplayın

Çözüm 3.1 :

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x)\right|^2 dx=1$: Normlanmış ψ'nin bulunma olasılığı

$$N^2=\int\limits_{-a}^{a}A^2\left(\cos\frac{\pi x}{a}+1\right)^2 dx=2A^2\int\limits_{0}^{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a}^2+2\cos\frac{\pi x}{a}+1\right)dx$$

$$N^2=2A^2\left[\frac{x}{2}+\sin\frac{2\pi x}{a}\frac{a}{4\pi}+2\sin\frac{\pi x}{a}\frac{a}{\pi}+x\right]_0^a$$

$$N^2=2A^2\left[\frac{a}{2}+\sin 2\pi\frac{a}{4\pi}+2\sin\pi\frac{a}{\pi}+a-(0+0+0+0)\right]=3A^2a$$

$$\psi(x)=\frac{1}{N}\psi'(x)=\frac{1}{\sqrt{3a}}\left(Cos\frac{\pi x}{a}+1\right)$$

b) $\Delta X=\sqrt{<X^2>-<X>^2}$ $\Delta P=\sqrt{<P^2>-<P>^2}$ ile tanımlı ise

$<X>=\int\limits_{-a}^{a}x\left|\psi(x,t)\right|^2 dx$: Beklenen değeri, tek fonksiyonun integrali olması sebebiyle sıfıra eşit olur. Aynı durum <P> beklenen değeri için de geçerlidir. Öyleyse biz $<X^2>$ ve $<P^2>$ değerlerini arayacağız.

$$\left\langle X^2\right\rangle=\int\limits_{-a}^{a}x^2\left|\psi(x,t)\right|^2 dx=2\int\limits_{0}^{a}x^2\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\left(\cos\frac{\pi x}{a}+1\right)\right)^2 dx$$

$$\left\langle X^2\right\rangle=\frac{2}{3a}\left[\int\limits_{0}^{a}x^2\cos^2\frac{\pi x}{a}dx+2\int\limits_{0}^{a}x^2\cos\frac{\pi x}{a}dx+\int\limits_{0}^{a}x^2dx\right]=\frac{2}{a^2}\left(\mathrm{I}_1+2\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3\right)$$

$$\mathrm{I}_1=\int\limits_{0}^{a}x^2\cos^2\frac{\pi x}{a}dx=\left(x^2\left(\frac{x}{2}+\sin\frac{2\pi x}{a}\frac{a}{4\pi}\right)\right)\Bigg|_0^a-\int\limits_{0}^{a}2x\left(\frac{x}{2}+\sin\frac{2\pi x}{a}\frac{a}{4\pi}\right)dx$$

$$I_1=\frac{a^3}{2}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a^2}{(2\pi)^2}x\cos\frac{2\pi x}{a}\Big|_0^a+\frac{a^2}{(2\pi)^2}\int_0^a\cos\frac{2\pi x}{a}dx\right]$$

$$I_1=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{4\pi^2}=a^3\left(\frac{2\pi^2+3}{12\pi^2}\right)$$

$$I_2=\int_0^a x^2\cos\frac{\pi x}{a}dx=x^2\sin\frac{\pi x}{a}\frac{a}{\pi}\Big|_0^a-\int_0^a 2x\sin\frac{\pi x}{a}\frac{a}{\pi}dx$$

$$I_2=\frac{2a^2}{\pi^2}\left[x\cos\frac{\pi x}{a}\right]_0^a-\int_0^a\frac{2a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}dx=\frac{2a^3}{\pi^2}$$

$$I_3=\int_0^a x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{a^3}{3}$$

$$\left\langle X^2\right\rangle=\frac{2}{a^2}\left(I_1+2I_2+I_3\right)=a\left(\frac{9}{2\pi^2}+1\right)$$

$$\left\langle P^2\right\rangle=\int_{-a}^{a}p^2|\psi(x)|^2dx=-\frac{\hbar^2}{3a}\int_{-a}^{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a}+1\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\cos\frac{\pi x}{a}+1\right)dx$$

$$\left\langle P^2\right\rangle=-\frac{\hbar^2}{3a}\left(-\frac{a^2}{\pi^2}\right)\left[\int_{-a}^{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}dx+\int_{-a}^{a}\cos\frac{\pi x}{a}dx\right]\equiv\frac{a\hbar^2}{3\pi^2}\left(I_1+I_2\right)$$

$$I_1=\int_{-a}^{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}dx=\left[\frac{x}{2}+\sin\frac{2\pi x}{a}\frac{a}{4\pi}\right]_{-a}^{a}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$$

$$I_2=\int_{-a}^{a}\cos\frac{\pi x}{a}dx=\sin\frac{\pi x}{a}\frac{a}{\pi}\Big|_{-a}^{a}=0$$

$$\left\langle P^2\right\rangle=\frac{a^2\hbar^2}{3\pi^2}$$

$$\Delta X=\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle}=\sqrt{a\left(\frac{9}{2\pi^2}+1\right)}$$

$$\Delta P=\sqrt{\left\langle p^2\right\rangle}=\sqrt{\frac{a^2\hbar^2}{3\pi^2}}=\frac{a\hbar}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Soru 3.2:
Tek boyutlu uzayda bir parçacığın dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + a^2}} e^{ip_0 x/\hbar}$$

olarak veriliyor (A, a ve p_0 reel sabitlerdir.) **a)** Dalga fonksiyonunu normlayın A sabitini bulun. **b)** Parçacığın x konumu ölçüldüğünde $\left[-a/\sqrt{3}, +a/\sqrt{3}\right]$ aralığında bulunma olasılığı nedir ?. **c)** Momentumun beklenen değerini bulun.

Çözüm 3.2 :

a) $\int_{-a}^{a} dx \left|\psi(x,t)\right|^2 = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi.\psi^* dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)} e^{ip_0 x/\hbar} . e^{-ip_0 x/\hbar} = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$1 = \left[A^2 \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{A^2}{a} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{A^2}{a} \pi$$

$$A = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

b) $\int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \left|\psi(x)\right|^2 dx = 2 \int_{0}^{a\sqrt{3}} \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) \Big|_{0}^{a/\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ **: bulunma olasılığı**

c) $\langle P \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P} \left|\psi\right|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \left(-i\hbar\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{ip_0 x/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx$

$$\langle P \rangle = A^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0}{x^2 + a^2} dx + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} dx \right], \qquad x^2 + a^2 = u \quad \text{ise}$$

$$= A^2 P_0 \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\hbar A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u} = \frac{A^2 P_0}{a} \pi + \frac{i\hbar A}{2} \left(\ln\left(x^2 + a^2\right) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\langle P \rangle = \frac{a}{\pi} \frac{\pi}{a} P_0 = P_0$$

Soru 3.3 :
Bir parçacığın mementum dağılım fonksiyonu

$$\phi(p) = \sqrt{\frac{2\pi a}{\hbar}} e^{-\frac{a}{\hbar}|p|}$$

olarak veriliyor. **a)** Dalga fonksiyonunun $\psi(x)=\sqrt{\frac{a}{2\pi\hbar}}\frac{2a}{x^2+a^2}$ olduğunu gösterin. **b)** Momentum ve enerjinin beklenen değerlerini bulun (bu iki fonksiyonun da çift fonksiyon olduğunu gözönüne alın).

Çözüm 3.3

a) $\psi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\phi(k)e^{ikx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\phi(p)e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2\pi a}{\hbar}}\frac{1}{2\pi\hbar}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}dPe^{\frac{P(a+xi)}{\hbar}}+\int\limits_{0}^{\infty}dPe^{\frac{p(-a+xi)}{\hbar}}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{a}{2\pi\hbar}}\frac{1}{\hbar}\left[\frac{\hbar}{a+xi}(1-0)-\frac{\hbar}{a-xi}(0-1)\right]$$

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{a}{2\pi\hbar}}\frac{2a}{x^2+a^2}$$

b) $\langle P\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x)dx=0$

Çünkü $\psi(x)$ çift fonksiyon olmasına karşın birinci türevi ile çarpımı tek fonksiyon verir.

$$\langle E\rangle=\frac{\langle p^2\rangle}{2m}=\frac{1}{2m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)dx$$

$$=-\frac{a^3\hbar}{\pi m}4\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{4x^2}{\left(x^2+a^2\right)^4}-\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^3}\right)dx=-\frac{a^3\hbar}{\pi m}4\left(-\frac{\pi}{a^5 16}\right)$$

$$\langle E\rangle=\frac{\hbar}{4a^2m}$$

Soru 3.4 :

Dirac dalta fonksiyonu için aşağıda verilen bağıntıların geçerli olduğunu gösterin:

a) $x\rho'(x)=-\rho(x)$

b) $\rho(\sqrt{x})=0$

c) $\rho(x-a)\rho(x-b)=\rho(a-b)$

Çözüm 3.4 :

a) $\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) = sbt\right]$ *ise ;*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx \quad \text{ve} \quad f(x) = x \quad \text{ise}$$

$x\delta'(x) = -\delta(x)$ olur

b) $\delta\left(\sqrt{x}\right) = \delta(t)$ şeklinde $\sqrt{x} = t$ değişken dönüşümü yapılır ise
$\delta(t-0) = 0 \quad t \neq 0 \quad (x \neq 0)$ için öyleyse $\delta\left(\sqrt{x}\right) = 0$ olur.

c) $\delta(x-a) = \begin{cases} x = a & \Rightarrow 0 \\ x \neq a & \Rightarrow \infty \end{cases}$ $\qquad \delta(x-b) = \begin{cases} x = b & \Rightarrow 0 \\ x \neq b & \Rightarrow \infty \end{cases}$

$$\delta(x-a)\delta(x-b) = \left.\begin{cases} x = a = b & \Rightarrow 0 \\ x \neq a \neq b & \Rightarrow \infty \end{cases}\right\} = \delta(a-b) \quad \text{olur}$$

Soru 3.5 :

$\hat{A},\ \hat{B}\ ve\ \hat{C}$ operatörleri için aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösterin

a) $\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{C}\right] + \left[\hat{B},\hat{C}\right]$

b) $\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$

Çözüm 3.5 :

a) $\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right] = \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\hat{C} - \hat{C}.\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} - \hat{C}\hat{B} = \left[\hat{A},\hat{C}\right] + \left[\hat{B},\hat{C}\right]$

b) $\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$

$$\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$$

Soru 3.6 :

Ehrenfest Teoremleri $\hat{H} = -\left(\hbar^2/2m\right)d^2/dx^2 + V(x)$ hamiltonyen operatörü için

a) $\left[\hat{H},x\right] = -i\hbar p/m$

b) $\left[\hat{H},p\right] = i\hbar dV/dx$ olduğunu gösterin

c) Bu iki bağıntıyı kullanarak

$$\langle p \rangle = m\frac{d\langle x \rangle}{dt}, \text{ ve } \frac{d\langle p \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

olduğunu gösterin (Bu sonuçlardan birincisi parçacığın klasik momentum tanımı *p=mv*, ikincisi ise, F=dV/dx olduğu düşünülürse, Newton'un ikinci yasası F=ma dır. Başka bir deyişle klasik mekanik ancak beklenen değerler için geçerlidir.

Çözüm 3.6 :

a) $$\left[\hat{A},\hat{x}\right]\psi = \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V\right)x\psi\right]-\left[x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V\right)\psi\right]$$

$$\left[\hat{H},\hat{x}\right]\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2}(x\psi)-x\frac{d^2\psi}{dx^2}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}2\frac{d\psi}{dx}$$

$$\left[\hat{H},\hat{x}\right] \equiv -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dx} \equiv -i\hbar\frac{p}{m}$$

b) $$\left[\hat{H},\hat{P}\right]\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi$$

$$\left[\hat{H},\hat{p}\right]\psi = i\frac{\hbar^3}{2m}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-i\hbar V\frac{\partial\psi}{\partial x}-\left[\frac{i\hbar^3}{2m}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-i\hbar\psi\frac{\partial V}{\partial x}-i\hbar V\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$\left[\hat{H},\hat{p}\right]\psi = i\hbar\psi\frac{\partial V}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \left[\hat{H},\hat{P}\right] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}$$

c) $$\langle P \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p|\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} mV|\psi(x,t)|^2 dx = m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{dt}|\psi(x,t)|^2 dx = m\frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\langle x \rangle}{dt}\right) = m\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} = m\langle a \rangle = \langle F \rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

4.KUYU POTANSİYELLERİ

Soru 4.1 :
100V luk bir potansiyel fark altında hızlandırılan bir elektron demeti 50eV luk bir basamak potansiyeline gönderiliyor. Yansıyan ve geçen elektronların yüzdesini bulun.

Çözüm 4.1 :

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{k-k'}{k+k'}\right|^2$$:yansıma katsayısı ve;

$$k = \left(\frac{RmE}{\hbar}\right)^{1/2} = \left(\frac{2.9{,}11.10^{-31}kg.100eV.1{,}6.10^{-19}J/eV}{\left(1{,}054.10^{-34}\,j.s\right)^2}\right)^{1/2} = 5{,}12.10^{10}$$

$$k' = \left(\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\right)^{1/2} = 3{,}62.10^{10}$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{5{,}12-3{,}62}{5{,}12+3{,}62}\right|^2 = 0{,}029 \cong \%3$$ yansıyan

$$T = \frac{k'}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{ckk'}{(k+k')^2} = \frac{74{,}1376}{76{,}3876} = 0{,}97 \cong \%97$$ geçen

Soru 4.2 :
100e V enerjili bir elektron demeti yüksekliği 110 eV olan bir potansiyel engeline rastlıyor. Tünelleme olasılığını hesaplayın.

Çözüm 4.2 :

$$t = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^{\ 2}\sinh^{\ 2}\alpha a}{4E(V_0-E)}\right]^{-1}$$: buradaki geçme olasılığı bize tonelleme olasılığını verir.

$$\alpha = \left(\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\right)^{1/2} = \left[\frac{2.9{,}11.10^{-31}kg(110-100)eV.1{,}6.10^{-19}\,j/eV}{(1{,}054.10^{-34}\,js)^2}\right]^{1/2}$$

$$\alpha = 1{,}62.10^{10}$$

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4000}{4000 + (110)^2\,Sinh^2\alpha a}$$: tünelleme olasılığı

Soru 4.3 :

$\left[0,a\right]$ aralığındaki sonsuz kuyuda bir parçacığın n=3 kuantum sayılı durumda olduğu biliniyor. **a)** Bu parçacığın konumunun $\left[0,a/3\right]$ arasında olma olasılığının 1/3 olduğunu gösterin. **b)** Genel olarak, bir n durumundaki parçacığın $\left[0,a/n\right]$ arasında bulunma olasılığının 1/n olduğunu gösterin.

Çözüm 4.3 :

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$: Sonsuz kuyuda dalga denklemi bu ise

a) $$\int_0^{a/3}\left|\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}\right|^2 dx=\frac{2}{\alpha}\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{6\pi}\sin\frac{6\pi x}{a}\right)\Bigg|_0^{a/3}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{a}}\left(\frac{a}{3}-\frac{a}{6\pi}0\right)=\frac{1}{3}$$: a/3 konumunda bulunma olasılığı

b) $$\int_0^{a/n}\left|\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\right|^2 dx=\frac{2}{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2n\pi}\frac{\sin\frac{2n\pi x}{a}}{2}\right)\Bigg|_0^{a/n}=\frac{1}{n}$$

Soru 4.4 :

a) Sonsuz kuyu potansiyelinde $E_n \quad E_{n+1}$ gibi ardışık iki enerji düzeyi arasındaki bağıl farkın

$$\frac{\Delta E_n}{E_n}=\frac{2n+1}{n^2}$$

olduğunu gösterin

b) Bağıl farkın klasik limitini bulun ve yorumlayın

Çözüm 4.4 :

a) $$E_n=\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL}n^2$$ **:** Sonsuz kuyu potansiyelinde enerji denklemi bu ise;

$$\Delta E_n=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL}(n+1)^2-\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n+1)$$

$$\frac{\Delta E_n}{E_n}=\frac{2n+1}{n^2}$$ olarak bulunur.

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \hbar\to 0}}\frac{2n+1}{n^2}\to 0$$ **:** yani, sonsuzda bağıl fark sıfır olur. Dolayısıyla birbirine çok yakın enerji değerleri söz konusudur. Ve bu enerjinin sürekliliği şeklinde gözlemlenir. Yani klasik fizik öngörüleri geçerlilik kazanır.

Soru 4.5 :

$[0,a]$ aralığındaki sonsuz kuyu potansiyelinde n kuantum sayılı bir özdurumda

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

olduğunu gösterin

Çözüm 4.5 :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}}$$: Sonsuz kuyuda dalga denklemi

$$\langle X \rangle = \int_0^a x|\psi(x)|^2 dx = \int_0^a x\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{2}{a}\int_0^a x\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{2n\pi x}{a}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a - \frac{1}{a}\left[x\sin\frac{2n\pi x}{a}\left(\frac{a}{2n\pi}\right)\Big|_0^a - \int_0^a \frac{a}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{a}dx\right]$$

$$\langle X \rangle = \frac{a}{2} + \frac{1}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{a}\left(\frac{-a}{2n\pi}\right)\Big|_0^a = \frac{a}{2} - \frac{a}{(2n\pi)^2}(1-1) = \frac{a}{2}$$

$$\langle X^2 \rangle = \int_0^a x^2|\psi(x)|^2 dx = \int_0^a x^2\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{2}{a}\int_0^a x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{2n\pi x}{a}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a - \frac{1}{a}\left[x^2\sin\frac{2n\pi x}{a}\left(\frac{a}{2n\pi}\right)\Big|_0^a - \int_0^a 2x\frac{a}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{a}dx\right]$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{1}{n\pi}\left[x\cos\frac{2n\pi x}{a}\left(-\frac{a}{2n\pi x}\right)\Big|_0^a - \int_0^a \cos\frac{2n\pi x}{a}\left(\frac{-a}{2n\pi}\right)dx\right]$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2}$$

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

Soru 4.6 :

aşağıda verilen $V(x)$ potansiyeli için Schrödinger denklemini boyutsuz hale getirin.

$$V(x) = -ax$$

Çözüm 4.6:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x).\psi(x)=E.\psi(x)$$: Tek boyutta zamansız schrödinger denklemi bu ise ;

$V(x)=-ax$ için ;

$$\rho=\alpha x \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{dx^2}=\alpha^2\frac{d^2}{d\rho^2} \quad \text{ve} \quad V(x)=-ax=-\frac{a\rho}{\alpha} \quad \text{ise}$$

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}.\frac{d^2\psi}{d\rho^2}-\frac{a\rho}{\alpha}\psi=E\psi \;\rightarrow\; \frac{d^2\psi}{d\rho^2}+\left(\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}.E+\frac{2ma\rho}{\alpha^3\hbar^2}\right)\psi=0$$

$$\frac{2ma}{\hbar^2\alpha^3}=1 \;\rightarrow\; \alpha=\left(\frac{2ma}{\hbar^2}\right)^{1/3} \quad \text{ise} \quad \frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}=\lambda \;\rightarrow\; E=\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}.\lambda$$

yukarıda elde ettiğimiz boyutsuz α ve λ değerlerine bağlı olarak

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2}+(\lambda+\rho)\psi=0$$: Boyutsuz Schrödinger denklemi elde edilir.

Soru 4.7 :

Tek boyutlu problemlerde bağlı enerjili durumların dalga fonksiyonmlarının daima reel olarak seçilebileceğini gösterin

Çözüm 4.7 :

Kare kuyuda E<0 bağlı durumları için;

I. ve II. Bölgede dalga denklemleri;

$$\alpha^2=\frac{2m|E|}{\hbar^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}-\alpha^2\psi=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\psi_I=ce^{\alpha x} \qquad \psi_{III}=De^{-\alpha x}$$ olarak bulunur.

II. Bölgede dalga denklemi ise;

$$k^2=\frac{2mV_0-|E|}{\hbar^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\psi_{II}=A\cos kx+BSinkx$$ olarak bulunur.

Sınır koşullarından;

(i) $\psi_I\big|_{x=-a}=\psi_{II}\big|_{x=-a} \quad \Rightarrow \quad Ce^{-\alpha a}=A\cos ka-B\sin ka$

(ii) $\psi_{III}\big|_{x=a}=\psi_{II}\big|_{x=a} \quad \Rightarrow \quad De^{-\alpha a}=A\cos ka+B\sin ka$

(iii) $\left.\dfrac{d\psi_I}{dx}\right|_{x=-a} = \left.\dfrac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=-a} \quad \Rightarrow \quad \alpha C e^{-\alpha a} = kA\sin ka + kB\cos ka$

(iv) $\left.\dfrac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\dfrac{d\psi_{III}}{dx}\right|_{x=a} \quad \Rightarrow \quad -\alpha D e^{-\alpha a} = -kA\sin ka + kB\cos ka$

şeklinde dört denklem elde edilir.

$$2A\cos ka = (C+D)e^{-\alpha a}$$
$$2kA\sin ka = \alpha(C+D)e^{-\alpha a}$$
$$2B\sin ka = -(C-D)e^{-\alpha a}$$
$$2kB\cos ka = \alpha(C-D)e^{-\alpha a}$$

$$\frac{2A\cos ka}{2kA\sin Ka} = \frac{(C+D)e^{-\alpha a}}{\alpha(C+D)e^{-\alpha a}} \rightarrow k\tan ka = \alpha$$

$$\frac{2B\sin ka}{2kB\cos Ka} = \frac{-(C-D)e^{-\alpha a}}{\alpha(C-D)e^{-\alpha a}} \rightarrow k\cot ka = -\alpha$$

Son elde edilen iki denklemin birlikte doğru olması mümkün değildir. Ki ikisi taraf tarafa çarpılırsa; $k^2 = -\alpha^2$ şeklinde sıfırdan farklı ve reel k ve α değerlerine karşın çelişkili bir eşitlik elde edilir.

O halde bu kartsayılardan birini sıfır yapmamız gerekir. İşte bu serbestliğimiz bizi iki yoldan da daima reel olan dalga denklemi elde etmeye götürür.

a) $B=0 \Rightarrow A\neq 0 \ ve \ C=D$ olarak $k\tan ka=\alpha$ ve $\psi_{II} = A\cos kx$ elde edilir.
b) $A=0 \Rightarrow B\neq 0 \quad C=-D$ olarak $k\cot ka=-\alpha$ $\psi_{II} = B\sin kx$ elde edilir.

Soru 4.8 :
Diatomik moleküllerin küçük genlikli titreşimleri için

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

harmonik salınıcı potansiyeli kullanılır. Tipik olarak $k \cong 10^3\ jm^{-2}$ olur. **a)** Diatomik moleküller için sıfır noktası enerjisini eV cinsinden hesaplayın. **b)** Birinci uyarılmış durumdan taban durumuna geçişte yayınlanan radyasyonun frekansını ve dalgaboyunu hesaplayın. bu dalganın hangi tür (mor ötesi, kızıl ötesi, görünür ışık bölgesi) olduğunu araştırın.

Çözüm 4.8 :
Harmonik salınıcı için genel enerji denklemi;

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \equiv E_k + E_p$$

Bu sistem bir diatomik molekül titreşimi olduğu için

a) $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar w = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$E_n = \left(0 + \frac{1}{2}\right)\frac{1{,}054.10^{-34}\,js}{1{,}6.10^{-19}\,j/eV}\sqrt{\frac{10^3\,jm^{-2}}{3{,}348.10^{-27}\,kg}} = 0{,}18eV$$

b) $E_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)0{,}36 = 0{,}54eV$

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0{,}36eV$$

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.10^{-34}\,js.3.10^8\,m/s}{\lambda} = 0{,}36eV.1{,}6.10^{-19}\,j/eV$$

$$\lambda = 34{,}48.10^{-7}\,m = 34480\dot{A}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8\,m/s}{34480\dot{A}} = 8{,}7.10^{13}.s^{-1}$$

Soru 4.9 :
Harmonik salınıcının bir *n* durumunda <xp+px> beklenen değerinin hesaplayın.

Çözüm 4.9 :

$\psi(x) = A_n H_n(\alpha x)e^{-\alpha^2 x^2/2}$: Harmonik salınıcı dalga denklemi

$$\langle xp\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n(\alpha x)e^{-\alpha^2x^2/2}x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)A_n H_n(\alpha x)e^{-\alpha^2x^2/2}dx$$

$$\langle xp\rangle = -i\hbar A_n^{\,2}\int_{-\infty}^{\infty} H_n e^{-\alpha^2x^2/2}x\left[e^{-\alpha^2x^2/2}\frac{dH_n}{dx} + H_n\left(\frac{d}{dx}e^{-\alpha^2x^2/2}\right)\right]dx$$

$$\langle xp\rangle = -i\hbar A_n^{\,2}\int_{-\infty}^{\infty} x\left[H_n H_n' e^{-\alpha^2x^2} + H_n.H_n e^{-\alpha^2x^2}\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right]dx$$

* $\rho = \alpha x \;\rightarrow\; x = \frac{\rho}{\alpha} \;\rightarrow\; dx = \frac{d\rho}{\alpha}, \quad A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}}$

* $H_n' = 2nH_{n-1}$: Türev bağıntısı

* $\int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-\delta^2} H_n(\rho)H_m(\rho) = \sqrt{\pi}\,2^n n!\delta_{nm}$: Diklik bağıntısı

* $H_{n+1} = 2\rho H_n - 2nH_{n-1} \;\rightarrow\; \rho H_n = \frac{1}{2}H_{n+1} + nH_{n-1}$: Tekrarlama bağıntısı

$$\langle xp\rangle = -i\hbar 2n\frac{A_n^2}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\rho H_n H_{n-1}e^{-\rho^2}d\rho + \frac{i\hbar A_n^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\rho H_n H_n e^{-\rho^2}d\rho$$

$$\langle xp\rangle = -i\hbar 2n\frac{A_n^2}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}H_{n+1}H_{n-1} + nH_{n-1}H_{n-1}\right)e^{-\rho^2}dx + i\hbar\frac{A_n^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}H_{n+1}H_n + nH_{n-1}H_n\right)e^{-\rho^2}d\rho$$

$$\langle xp\rangle = \left(-\hbar 2n\frac{A_n^2}{\alpha^2}\right)n\left(\sqrt{\pi}\,2^{n-1}(n-1)!\,\delta_{(n-1)(n-1)}\right) = -i\hbar\frac{2n}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)\left(\sqrt{\pi}\,\frac{2^n}{2}n!\right)$$

$$\langle xp\rangle = -i\hbar\frac{n}{\alpha}$$

$$\langle px\rangle = -i\hbar A_n^2\int_{-\infty}^{\infty}H_n e^{-\rho^2/2}\frac{d}{dx}\left(xH_n e^{-\rho^2/2}\right)dx$$

$$\langle px\rangle = -i\hbar A_n^2\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2 e^{-\rho^2}dx + \langle xp\rangle$$

$$\langle px\rangle = -i\hbar\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)\left(\sqrt{n}\,2^n n!\,\delta_{nn}\right) + \left(-i\hbar\frac{n}{\alpha}\right)$$

$$\langle px\rangle = -i\hbar\left(\alpha + \frac{n}{\alpha}\right)$$

$$\langle xp + px\rangle = \langle xp\rangle + \langle px\rangle = -i\hbar\left(\frac{n}{\alpha} + \alpha + \frac{n}{\alpha}\right)$$

$\langle xp + px\rangle = -i\hbar\left(\alpha + \frac{2n}{\alpha}\right)$ olarak bulunur.

$$\alpha = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}$$

5.KUANTUM MEKANİĞİNİN GENEL FORMALİZMİ

Soru 5.1 :
Dalga fonksiyonu uzayında birbirine dik ψ_1 ve ψ_2 vektörleri veriliyor :

$$(\psi_1,\psi_2)=0$$

Bu iki vektör için Pisagor teoremi

$$|\psi_1+\psi_2|^2=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2$$

nin doğruluğunu gösterin.

Çözüm 5.1

$$|\psi_1+\psi_2|^2=(\psi_1+\psi_2)(\psi_1^*+\psi_2^*)$$
$$=(\psi_1,\psi_1)+(\psi_2,\psi_1)+(\psi_2,\psi_2)+(\psi_1,\psi_2)$$

$(\psi_1,\psi_2)=0$ ise ; $(\psi_2,\psi_1)=(\psi_1,\psi_2)=0$ olur

$$|\psi_1+\psi_2|^2=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2$$

Soru 5.2 :
$[0,+\infty]$ aralığında verilen

$$\psi_1=e^{-x} \qquad \psi_2=xe^{-x} \qquad \psi_3=x^2e^{-x}$$

dalga fonksiyonlarını ortonormal hale getirin.

Çözüm 5.2:

$\psi_1=e^{-x} \qquad \psi_2=xe^{-x} \qquad \psi_3=x^2e^{-x}$ ise;

$$N_1^2=(\psi_1,\psi_1)=\int_0^\infty e^{-2x}dx=-\frac{e^{-2x}}{2}\bigg|_0^\infty=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$U_1=\frac{\psi_1}{N_1}=\sqrt{2}e^{-x}$$

$$\psi_2'=\psi_2-(\psi_2,U_1)U_1=xe^{-x}-\left(\int_0^\infty\sqrt{2}xe^{-2x}dx\right)U_1$$

$$\int_0^\infty x^ne^{-ax}=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}=\frac{n!}{a^{n+1}}$$ bağıntısı biliniyor ise;

$$(\psi_2,U_1)=\sqrt{2}\int_0^\infty xe^{-2x}dx=\sqrt{2}\frac{1!}{2^{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\psi_2 = xe^{-x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}e^{-x} = e^{-x}(x - \frac{1}{2})$$

$$N_2^2 = \left(\psi_2', \psi_2'\right) = \int_0^\infty \left(x^2 e^{-2x} - xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{4} \right) dx = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^\infty x^2 e^{-2x} = \frac{2!}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^\infty xe^{-2x} = \frac{1!}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{4} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)_0^\infty = \frac{1}{8}$$

$$N_2^2 = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$U_2 = \frac{\psi_2'}{N_2} = e^{-x}\left(x - \frac{1}{2} \right) .2\sqrt{2}$$

$$\psi_3' = \psi_3 - (\psi_3, U_1)U_1 - (\psi_3, U_2)U_2$$

$$(\psi_3, U_1) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\sqrt{2}e^{-x} dx = \sqrt{2}\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = \sqrt{2}\,\frac{2!}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(\psi_3, U_2) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, 2\sqrt{2}e^{-x}\left(x - \frac{1}{2} \right) dx = 2\sqrt{2}\int_0^\infty \left(x^3 e^{-2x} - \frac{x^2 e^{-2x}}{2} \right) dx$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^\infty x^3 e^{-2x} dx = \frac{3!}{2^{3+1}} = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-2x} dx}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{2!}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(\psi_3, U_2) = 2\sqrt{2}(\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2) = 2\sqrt{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\psi_3' = \psi_3 - (\psi_3, U_1)U_1 - (\psi_3, U_2)U_2$$

$$=x^2e^{-x}-\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}e^{-x}-\frac{\sqrt{2}}{2}2\sqrt{2}e^{-x}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=x^2e^{-x}-\frac{e^{-x}}{2}-2e^{-x}\left(x-\frac{1}{2}\right)=e^{-x}\left(x^2-\frac{1}{2}-2x+1\right)$$

$$\psi_3'=e^{-x}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$$

$$N_3^2=\left(\psi_3',\psi_3'\right)=\int_0^\infty e^{-2x}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)^2dx$$

$$=\int_0^\infty\left(x^4e^{-2x}+5x^2e^{-2x}+\frac{e^{-2x}}{4}-4x^3e^{-2x}-2xe^{-2x}\right)dx$$

$$=\frac{4!}{2^5}+5.\frac{2!}{2^3}+\frac{1}{8}-4.\frac{3!}{2^4}-2\frac{1!}{2^2}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$U_3=\frac{\psi_3'}{U_3}=\frac{x^2e^{-x}}{\left(1/2\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{2}x^2e^{-x}$$

Soru 5.3 :

Bir sonsuz kuyu potansiyelinde bulunan her 1000 adet parçacıktan 100 tanesinin $9E_1$ enerjiye, kalan 900 tanesinin de $64E_1$ enerjiye sahip oldukları biliniyor.

a) Bu sistemin durumunu veren dalga fonksiyonunu kurun ve normlayın.

b) $\left[0,L/2\right]$ aralığında kaç tane parçacık olacağını hesaplayın

Çözüm 5.3 :

a) a_n özdurumunda bir parçacığın bu halde bulunma olasılığı $P(a_n)=\left|U_n,\psi\right|^2=\left|C_n\right|^2$ ifadesiyle süperpozisyon ilkesinin bir sonucu olarak verilmişti.

$E_n=n^2E_1$ genel enerji düzeyi bağıntısından

$E_3=9E_1,\qquad E_8=64E_1$ olarak bulunur.

$$P(E_3)=\left|C_3\right|^2=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}$$

$$P(E_8)=\left|C_8\right|^2=\frac{900}{1000}=\frac{9}{10}$$ olarak yazılabilir

$\left[0,L\right]$ aralığındaki sonsuz kuyuda $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ enerjili özdurumlarının

$$U_n = \sqrt{\frac{2}{L}} Sin \frac{n\pi x}{L}$$

olduğu biliniyor ise normlaşmış dalga fonksiyonu;

$$\psi(x) = \sum C_n U_n = C_3 U_3 + C_8 U_8 = \frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{2}{L}} Sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{2}{L}} Sin \frac{8\pi x}{L}$$

b) $P\left(0,\frac{L}{2}\right) = \int_0^{L/2} |\psi|^2 dx = \int_0^{L/2} dx \left(\frac{1}{5L} Sin^2 \frac{3\pi x}{L} + \frac{3}{5L} Sin^2 \frac{8\pi x}{L} + \frac{6}{5L} Sin \frac{3\pi x}{L} Sin \frac{8\pi x}{L} \right)$

$$P\left(0,\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{5L}\left[\frac{x}{2}\right]_0^{L/2} + \frac{3}{5L}\left[\frac{x}{2}\right]_0^{L/2} = \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = \frac{1}{5}$$

Yani ; 1000 tanecikten 200'ü $\left[0,\frac{L}{2}\right]$ aralığında bulunur.

Soru 5.4 :
Aşağıdaki operatörlerin hermitik eşleniğini alın ve bu operatörlerin hermitik olup olmadıklarını söyleyin:

a) $\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)$ **b)** $\hat{A} + i\hat{B}$ **c)** $i\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)$

Çözüm 5.4:

a) $\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)^+ = B^+ A^+ - A^+ B^+ = -\left(A^+ B^+ - B^+ A^+\right)$: Hermitik eşlenik

$\left(\phi, \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\psi\right) = \left(\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\phi, \psi\right)$: Hermitik olma koşulu

$\left(\phi, \hat{A}\,\psi\right) = \left(\hat{A}\,\phi, \psi\right) = \left(\psi, \hat{A}\,\phi\right)^*$: Hermitsellik ve skaler çarpımın eşleniği ilkesinden

$$\left(\phi, \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\psi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\psi dx$$

$$\left(\left(\left(\hat{A},\hat{B}\right) - \left(\hat{B},\hat{A}\right)\right)\phi, \psi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\left(\hat{A},\hat{B}\right) - \left(\hat{B},\hat{A}\right)\right)\phi\right]^* \psi dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\hat{A},\hat{B}\right)^* - \left(\hat{B},\hat{A}\right)^*\right)\phi^* \psi dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\hat{B},\hat{A}\right) - \left(\hat{A},\hat{B}\right)\right)\phi^* \psi dx$$

$$\left(\left(\left(\hat{A},\hat{B}\right)-\left(\hat{B},\hat{A}\right)\right)\phi,\psi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}-\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\phi^{*}\psi dx \neq \int_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\psi dx$$ ise hermitsel değildir ?

b) $\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)^{+}=\hat{A}^{+}+(i\hat{B})^{+}=\hat{A}^{+}-i\hat{B}^{+}$ **;** Hermitsel eşlenik

$\left(\phi,\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)\psi\right)=\left(\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)\phi,\psi\right)$; Hermitsellik koşulu

$$\left(\phi,\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)\psi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)\psi dx$$

$$\left(\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)\phi,\psi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{A}^{*}-i\hat{B}^{*}\right)\phi^{*}\psi dx \neq \left(\phi,\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)\psi\right)$$ ise $\left(\hat{A}+i\hat{B}\right)$ hermitik operatör değildir.

c) $\left(i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)^{+}=-i\left(\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}-\hat{A}^{+}\hat{B}^{+}\right)=i\left(\hat{A}^{+}\hat{B}^{+}-\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}\right)$: Hermitik eşlenik

$\left(\phi,\left(i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\right)\psi\right)=\left(\left(i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\phi,\psi\right)\right)$: Hermitsellik koşulu

$$\left(\phi,\left(i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\right)\psi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\psi\, dx$$

$$\left(i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\phi,\psi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\phi\right)^{*}\psi\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-i\left(\left(\hat{A},\hat{B}\right)^{*}-\left(\hat{B},\hat{A}\right)^{*}\right)\phi^{*}\psi\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-i\left(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\right)\phi^{*}\psi\, dx$$

$\left(i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\phi,\psi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\psi\, dx=\left(\phi,i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\psi\right)$ ise $i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)$ operatörü hermitseldir denir.

NOT: $\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)=\left(\left(\hat{A},\hat{B}\right)-\left(\hat{B},\hat{A}\right)\right)$

$\left(\hat{A},\hat{B}\right)^{*}=\left(\hat{B},\hat{A}\right)$

$\left(a+ib\right)^{*}=\left(a-ib\right)$

Bağıntıları kullanılarak işlemler ilerletilmiştir.

Soru 5.5 :

Aşağıda matris temsili verilen operatörün özdeğer ve özvektörlerini bulun :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Çözüm 5.5 :
λ =özdeğer ise;

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$\hat{A}|\psi >= \lambda|\psi >$: Özvektör bağıntısından ;

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda = 1 + i$ değeri için ;

$$(1-(1+i))c_1 + ic_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = c_2$$
$$-ic_1 + (1-(1+i))c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

$c_1^2 = -c_2^2$ ve $c_2 = 1$ dersek $c_1 = i$ olur.

$\lambda = 1 - i$ özdeğeri için yine ;
$-c_1^2 = c_2^2$ bulunur ve $c_2 = 1$ dersek $c_1 = -i$ olur.

$$|\psi_1 > = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\psi_2 > = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soru 5.6 :
a) aşağıda matris temsili verilen iki operatörün sıra değiştirdiğini gösterin **b)** Ortak özdeğer ve özvektörleri bulun.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Çözüm 5.6 :

a) $\left[A,B\right]=AB-BA=0$

$$A.B=\begin{pmatrix}2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) & \left(-1+\frac{3}{2}\right)\\ \left(1-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=\frac{35}{16}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) & \left(1-\frac{1}{2}\right)\\ \left(-1+\frac{3}{2}\right) & \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=\frac{35}{16} \quad \text{ise ;}$$

$\left[A,B\right]=0$; yani, sıra değiştirir operatörlerdir. Öyleyse, bu iki operatör aynı anda kesin ölçülebilir.

b) $A\psi=a\psi$ ve $B\psi=b\psi$ eşitliklerini gerçekleyen bir ψ özvektör tanımlanır ise ;

$$B(A\psi)=B(a\psi) \quad\rightarrow\quad BA\psi=aB\psi \quad\rightarrow\quad BA\psi=a(b\psi)$$
$$A(B\psi)=A(b\psi) \quad\rightarrow\quad AB\psi=bA\psi \quad\rightarrow\quad AB\psi=b(a\psi)$$
$$AB\psi=ab\psi=BA\psi \quad\Rightarrow\quad \left[AB-BA\right]=\left[A,B\right]=0 \quad \text{olmalı ise;}$$

$$A=\begin{pmatrix}2-a & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-a\end{pmatrix}=0 \quad \text{ise ; özdeğerleri ;} \quad a_{1,2}=\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{için ;} \quad |\psi_1>=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}}\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

$$a_2=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{için ;} \quad |\psi_2>=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}}\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}-b & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}-b\end{pmatrix}=0 \quad \text{ise özdeğerler} \quad b_{1,2}=\frac{5\pm i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$b_1 = \frac{5+i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \quad \text{için} \quad |\psi_1 > = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$b_2 = \frac{5-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \quad \text{için} \quad |\psi_2 > = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

Soru 5.7 :

$\hat{A}$ ve $\hat{B}$ operatörleri $\hat{A}^2 = 0$, $\hat{A}\hat{A}^+ + \hat{A}^+\hat{A} = 1$, $\hat{B} = \hat{A}^+\hat{A}$ bağıntılarıyla tanımlanıyor.
$\hat{B}^2 = 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm 5.7 :

$$\left(\hat{A}, \hat{A}^+\right) + \left(\hat{A}^+, \hat{A}\right) = 1$$

$$\left(\hat{A}.\hat{A}, 1\right) + \left(\hat{A}^+, \hat{A}\right) = 1$$

$$(0,1) + \hat{B} = 1$$

$$\hat{B} = 1$$

Soru 5.8 :

xp_x operatörünün hermitik olmadığını, ancak $\left(xp_x + p_x x\right)/2$ operatörünün hermitik olduğunu gösterin (Bu tür fiziksel büyüklüklerin beklenen değerini hesaplamak için önce böyle simetrik hale getirmek gerekir.)

Çözüm 5.8 :

$$\left(\phi, x\hat{P}_x\psi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* x\left(-i\hbar\frac{d\psi}{dx}\right)dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* x\frac{d\psi}{dx}\,dx$$

$$= -i\hbar\left[\left[\phi^* x\psi\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi\frac{d}{dx}\left(\phi^* x\right)dx\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(-i\hbar\frac{d\phi}{dx}x\right)^*\psi dx + \int_{-\infty}^{\infty}\left(-i\hbar\phi\right)^*\psi dx$$

$$\left(x\hat{P}_x\phi, \psi\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(-xi\hbar\frac{d\phi}{dx}\right)^*\psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar x\frac{d\phi^*}{dx}\psi dx$$

$$= \left[i\hbar x\phi^*\psi\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*\frac{d}{dx}\left(i\hbar x\psi\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*\left(-i\hbar x\frac{d\psi}{dx}\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*\left(-i\hbar\psi\right)dx$$

$\left(\phi, x\hat{P}_x\psi\right) \neq \left(x\hat{P}_x, \psi\right)$ ise hermitsel değildir.

$$\left(\phi, \left(\frac{xP_x + P_x x}{2}\right)\psi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \left(\frac{-i\hbar}{2}\right)\left(2x\frac{d\psi}{dx} + 2\psi\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(-i\hbar x\phi^* \frac{d\psi}{dx} - i\hbar\phi^*\psi\right)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar x\phi^* \frac{d\psi}{dx} = -i\hbar x\phi^*\psi\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar\psi\left(\frac{d\phi^*}{dx}x + \phi^*\right)dx; \text{ ise}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(-i\hbar\frac{d\psi}{dx}x\right)^* + i\hbar\psi\phi^* = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-i\hbar}{2}\left(x\frac{d\phi^*}{dx} + \frac{d}{dx}\left(x\phi^*\right)\right)\right]^* \psi\, dx$$

$$= \left(\left(\frac{x\hat{P}_x + \hat{P}_x x}{2}\right)\phi, \psi\right) \quad \text{ise hermitseldir.}$$

Soru 5.9 :

Hermitik bir $\hat{A}$: operatörü cinsinden

$$\hat{U} = \frac{\hat{A} - i}{\hat{A} + i}$$

operatöru tanımlanıyor. $\hat{U}\hat{U}^+ = 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm 5.9 :

$\hat{A} = \hat{A}^+$ hermitsel operatör ise ;

$$\hat{U}\hat{U}^+ = \left(\frac{\hat{A}-i}{\hat{A}+i}\right)\left(\frac{\hat{A}-i}{\hat{A}+i}\right)^+ = \frac{\hat{A}-i}{\hat{A}+i}.\frac{\hat{A}+i}{\hat{A}-i} = 1$$

Soru 5.10 :

a) $H = p^2/2m + V(x)$ hamiltonyeni için

$$\left[x, \left[x, H\right]\right] = -\hbar^2/m$$

olduğunu gösterin.

c) H operatörünün özdeğerleri E_n ve özvektörleri u_n ise

$$\sum_m \left(E_m - E_n\right)\left|x_{nm}\right|^2 = \hbar^2/2m$$

olduğunu gösterin. Burada $x_{nm} = \left(u_m, x u_n\right)$ matris elemanıdır.

Çözüm 5.10 :

a) $H = \dfrac{p^2}{2m} + V = \dfrac{-\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + V$

$$[x,H]\psi = (xH - Hx)\psi$$
$$= -x\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x\psi)\right)$$
$$= -x\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\left(\psi + x\frac{d\psi}{dx}\right)$$
$$= -x\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dx} + x\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = \frac{\hbar^2}{m}\frac{d\psi}{dx}$$

$$[x,H] = \frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dx}$$

$$[x,[x,H]]\psi = \left[x, \frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dx}\right]\psi = x\frac{\hbar^2}{m}\frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dx}(x\psi)$$
$$= x\frac{\hbar^2}{m}\frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar^2}{m}\psi - \frac{\hbar^2}{m}x\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\hbar^2}{m}\psi$$

$$[x,[x,H]] = -\frac{\hbar^2}{m}$$

b) $(E_m - E_n)\langle n|x|m\rangle = \frac{i\hbar}{m}\langle n|P_x|m\rangle$ biliniyor ise, ve $\langle n|x|m\rangle^* = \langle m|x|n\rangle$ x'in hermitsellik özelliğinden;

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[(E_m - E_n)\langle n|x|m\rangle\right]\langle m|x|n\rangle = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{i\hbar}{m}\langle n|P_x|m\rangle\right]\langle m|x|n\rangle$$

$$= \frac{i\hbar}{m} < n|P_x|\left(\sum_{m=1}^{\infty}|m >< m|\right)|x|n >$$

(I) $\sum_{m=1}^{\infty}(E_m - E_n)|< n|x|m >|^2 = \frac{i\hbar}{m} < n|P_x x|n>$ bulunur.

Baştaki denklemede; $n \to m,\quad m \to n$ yapılır. Ve de yeniden, m üzerinden toplam alınıp, sağ taraftan bu sefer de $<n|x|m>$ ile çarpılır ise;

(II) $\sum_{m=1}^{\infty}(E_m - E_n)|< m|x|n >|^2 = -\frac{i\hbar}{m} < n < xP_x > n >$ bulunur.

I ve II de bir daha $n \to m,\ \ m \to n$ yapılıp taraf tarafa toplanır ise;

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\left(E_n-E_m\right)\left|<n|\,\mathrm{x}|m>\right|^2=-\frac{i\hbar}{m}<m|\,xP_x-P_xx|\,m>=-\frac{i\hbar}{m}<m|i\hbar|m>$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(E_n-E_m\right)\left|x_{mn}\right|^2=\frac{\hbar^2}{2m}$$

sonucunu elde ederiz.

Soru 5.11 :

Antihermitik bir operatör $A^+=-A$ olarak tanımlanır. Antihermitik operatörlerin özdeğerlerinin sanal olduğunu ispatlayın. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler dik olur mu ?

Çözüm 5.11 :

$A\psi_n=\lambda_n\psi_n$ özdeğer denkleminde ψ_n A değişkeninin λ_n özdeğerine karşılık gelen özvektör ise; Hermitsel bir operatörün reel olduğunu biliyorduk;

$$\left(\phi,A\psi\right)=\left(A\phi,\psi\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*A\,\psi dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(A\phi\right)^*\psi dx \qquad \Rightarrow \qquad \text{A reel olmalıdır.}$$

Antihermitsel bir operatör ise;

$A^+=-A \qquad \rightarrow \qquad \left\langle A^+\right\rangle=-\left\langle A\right\rangle$ ve $\left\langle A^+\right\rangle=\left\langle A\right\rangle^*\rightarrow\left\langle A\right\rangle^*=-\left\langle A\right\rangle$ olarak bulunur.

Aynı zamanda;

$\psi_n(A\psi_n)=\psi_n(\lambda_n\psi_n)\rightarrow\left(\psi_n,A\psi_n\right)=\lambda_n\left(\psi_n,\psi_n\right)$

ψ_n normlanmış ise; $\lambda_n=\left(\psi_n,A\psi_n\right)=\left\langle A\right\rangle$ elde edilir.

A sanal ise, <A> da sanaldır. Öyleyse ;

$\lambda_n=<A>\equiv$ saf bir imajiner sayı olmalıdır.

Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri dik olur mu?;

$$\psi_m\left(A\psi_n\right)=\psi_m\left(\lambda_n\psi_n\right)\rightarrow\left(\psi_{m,}A\psi_n\right)=\lambda_n\left(\psi_m,\psi_n\right)\rightarrow$$

$$\left(\psi_m,A\psi_n\right)^*=\lambda_n^*\left(\psi_m,\psi_n\right)^*\rightarrow\left(\psi_{n,}A^+\psi_m\right)=\lambda_n^*\left(\psi_n,\psi_m\right)\rightarrow$$

$$\left(\psi_n,(-A)\psi_m\right)=\lambda_n^*\left(\psi_n,\psi_m\right) \quad \text{bulunur.}$$

Ve diğer bir özdeğer denklemi olarak;

$$\left(\psi_n,A\psi_m\right)=\lambda_m\left(\psi_n,\psi_m\right) \quad \text{yazılır}$$

Ve de bunlar taraf tarafa toplanır ise;

$$\left(\psi_n,\left((-A)+A\right)\psi_m\right)=\left(\lambda_n^*+\lambda_m\right)\left(\psi_n,\psi_m\right) \quad \text{bulunur.}$$

Antihermitsel bir operatörün özdeğerinin sanal olacağını az yukarıda göstermiştik. Öyley ise;

$$0=(-\lambda_n+\lambda_m)(\psi_n,\psi_m)$$

$(\psi_n,\psi_m)(\lambda_m-\lambda_n)=0$ olur.

$$(\psi_n,\psi_m)\delta_{mn}=0 \qquad \begin{cases} m\neq n \;\; ise \;\; (\psi_n,\psi_m)=0 \\ m=n \;\; ise \;\; (\psi_n,\psi_m)=(\psi_n,\psi_n)=1 \end{cases}$$

yani antihermitsel bir operatörün özvektörleri $n\neq m$ hali için dik olabilmektedir.

Soru 5.12 :

$[A,B]=0$ ise $[A^n,B]=0$ olacağını ispatlayın.

Çözüm 5.12:

$$[A,B]=(A,B)-(B,A)=0 \quad \rightarrow \quad (A,B)=(B,A)$$

$(A,B)=(B^+,A^+)\equiv(B,A) \Rightarrow$ A ve B hermitseldir.

Öyleyse;

$(A^n,B)=(B^+,(A^n)^+)\equiv(B,A^n)$ ise

$[A^n,B]=(A^n,B)-(B,A^n)=0$ olur.

Soru 5.13 :

Herhangi üç operatör için

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

olduğunu gösterin

Çözüm 5.13 :

$$[A,[B,C]]=[A,BC-CB]=[A,BC]-[A,CB]$$
$$[A,[B,C]]=(B[A,C]+[A,B]C)-(C[A,B]+[A,C]B)$$
$$[A,[B,C]]=-[B,[C,A]]-[C,[A,B]]$$

$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$ Olarak bulunur.

<u>**NOT :**</u>

- $$\begin{aligned} B[A,C]+[A,B]C &= B(AC-CA)+(AB-BA)C \\ &= BAC-BCA+ABC-BAC \\ &= A(BC)-(BC)A=[A,BC] \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} C[A,B]+[A,C]B &= C(AB-BA)+(AC-CA)B \\ &= CAB-CBA+ACB-CAB \\ &= A(CB)-(CB)A=[A,CB] \end{aligned}$$

Soru 5.14 :

Açısal momentum vektörü $\vec{L}$ nin bileşenleri

$$L_x=yp_z-zp_y \qquad L_y=zp_x-xp_z \qquad L_z=xp_y-yp_x$$

olarak tanımlanır.

a) Bu bileşenler arasındaki sıra değiştirme bağıntılarının

$$[L_x,L_y]=i\hbar L_z \qquad [L_y,L_z]=i\hbar L_x \qquad [L_z,L_x]=i\hbar L_y$$

olduğunu gösterin

b) $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ operatörünün herbir bileşenle sıra değiştirdiğini ispatlayın

Çözüm 5.14 :

a) $\left[L_x, L_y\right] = L_x L_y - L_y L_x$

$$L_x L_y = \left(-i\hbar^2\right)\left(y\frac{d}{dz} - z\frac{d}{dy}\right)\left(z\frac{d}{dx} - x\frac{d}{dz}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{d}{dx} + yz\frac{d^2}{dzdx} - yx\frac{d^2}{dz^2} - z^2\frac{d^2}{dydx} + zx\frac{d^2}{dydz}\right)$$

$$L_y L_x = -\hbar^2\left(zy\frac{d^2}{dxdz} - z^2\frac{d^2}{dxdy} - xy\frac{d}{dz^2} + x\frac{d}{dy} + zx\frac{d}{dzdy}\right)$$

$$\left[L_x, L_y\right] = \hbar^2\left(x\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dx}\right) = i\hbar L_z$$

$$\left[L_y, L_z\right] = \left(-i\hbar^2\right)\left[\left(z\frac{d}{dy} + zx\frac{d^2}{dxdy} - zy\frac{d^2}{dx^2} - x^2\frac{d^2}{dzdy} + xy\frac{d^2}{dzdx}\right)\right.$$

$$\left.-\left(xz\frac{d^2}{dydx} - x^2\frac{d^2}{dydz} - yz\frac{d}{dx^2} + y\frac{d}{dz} + yx\frac{d}{dxdz}\right)\right]$$

$$\left[L_y, L_z\right] = \hbar^2\left(z\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dz}\right) = i\hbar L_x$$

$$\left[L_z, L_x\right] = \left(-i\hbar\right)^2\left[\left(x\frac{d}{dz} + xy\frac{d^2}{dydz} - xz\frac{d}{dy^2} - y^2\frac{d^2}{dxdz} + yz\frac{d^2}{dxdy}\right)\right.$$

$$\left.-\left(yx\frac{d^2}{dzdy} - y^2\frac{d^2}{dzdx} - zx\frac{d}{dy^2} + z\frac{d}{dx} + zy\frac{d^2}{dydx}\right)\right]$$

$$= -\hbar^2\left(x\frac{d}{dz} - z\frac{d}{dx}\right) = i\hbar L_y$$

b) $\left[L^2, L_x\right] = \left[L^2, L_y\right] = \left[L^2, L_z\right] = 0$ olur mu bakalım.

$$\left[L_x, L_x\right] = \left[L_y, L_y\right] = \left[L_z, L_z\right] = 0$$

$$\left[L^2, L_x\right] = \left[L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x\right] = \left[L_x^2, L_x\right] + \left[L_y^2, L_x\right] + \left[L_z^2, L_x\right]$$

$$= 0 + \left(L_y\left[L_y, L_x\right] + \left[L_y, L_x\right]L_y\right) + \left(L_z\left[L_z, L_x\right] + \left[L_z, L_x\right]L_z\right)$$

$$= L_y\left(-i\hbar L_z\right) + \left(-i\hbar L_z\right)L_y + L_z\left(i\hbar L_y\right) + \left(i\hbar L_y\right)L_z$$

$$\left[L^2, L_x\right] = i\hbar\left(-L_y L_z - L_z L_y + L_z L_y + L_y L_z\right) = 0$$

Ve aynı şekilde;
$\left[L^2, L_y\right] = \left[L^2, L_z\right] = 0$
olduğu görülür.

Soru 5.15 :
A ve B fiziksel büyüklükleri hareket sabitleri ise, yani $\left[\hat{H}, \hat{A}\right] = 0$ ve $\left[\hat{H}, \hat{B}\right] = 0$ ise, bunların komütatörü $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ ye karşılık gelen büyüklüğün de hareket sabiti olacağını ispatlayın (Poisson teoremi).

Çözüm 5.15:

$$\left[\hat{H}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = [H, AB] - [H, BA]$$
$$= HAB - ABH - HBA + BAH = 0$$
$$HA = AH \rightarrow (HA)B = (AH)B) \rightarrow H(AB) = (AB)H$$
$$HB = BH \rightarrow (HB)A = (BH)A \rightarrow HBA = BAH$$

Soru 5.16 : a genişliğindeki sonsuz kuyu potansiyelinde bir parçacığın dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \sin\frac{2\pi x}{a} + 2\sin\frac{3\pi x}{a} + 2\sin\frac{5\pi x}{a}$$

olarak veriliyor.

a) Bu dalga fonksiyonunu normlayın.
b) Enerjini beklenen değerini bulun.
c) Parçacığın $[0, a/2]$ aralığında bulunma olasılığını hesaplayın.

Çözüm 5.16 :

a) $N^2 = \int_0^a |\psi(x)|^2 dx$

$$N^2 = \int_0^a \left[\sin^2\frac{2\pi x}{a} + 4\sin^2\frac{3\pi x}{a} + 4\sin^2\frac{5\pi x}{a} + 4\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{3\pi x}{a} + 4\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{5\pi x}{a} + \right.$$

$$\left. + 8\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{5\pi x}{a}\right]dx$$

$$\int_0^\pi \sin ax \sin bx dx = \begin{cases} 0 & a \neq b \ \ ise \\ \pi/2 & a = b \ \ ise \end{cases}$$ bağıntısına göre;

$$N^2=\int_0^a\left[\sin^2\frac{2\pi x}{a}+4\sin^2\frac{3\pi x}{a}+4\sin^2\frac{5\pi x}{a}\right]dx=\frac{a}{2}+\frac{4a}{2}+\frac{4a}{2}=\frac{9a}{2}\quad \text{olur.}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sin\frac{2\pi x}{a}+2\sin\frac{3\pi x}{a}+2\sin\frac{5\pi x}{a}\right)$$

b) $\langle E\rangle=\int_0^a\psi(x)\frac{p^2}{2m}\psi(x)dx$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(x)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d}{dx^2}\left(\sin\frac{2\pi x}{a}+2\sin\frac{3\pi x}{a}+2\sin\frac{5\pi x}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{2\pi}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}+\frac{6\pi}{a}\cos\frac{3\pi x}{a}+\frac{10\pi}{a}\cos\frac{5\pi x}{a}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(2\sin\frac{2\pi x}{a}+9\sin\frac{3\pi x}{a}+25\sin\frac{5\pi x}{a}\right)$$

$$\langle E\rangle=\frac{35}{9}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

c) $\int_0^{a/2}|\psi|^2dx=\frac{2}{9a}\left(\frac{a}{4}+4\frac{a}{4}+4\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{2}$

Soru 5.17 :

$\psi(\vec{r})$ dalga fonksiyonunun $\psi(\vec{r})=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ şeklinde üç ayrı değişkenin fonksiyonu olarak ifade edilebileceğini biliyorduk.

Bunlardan $R(r)$ fonksiyonunun diferansiyel ifadesi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+W^2y=0$$

Şeklinde verilmiş ise bu ifadenin $Y=A\sin wx+B\cos wx$ şeklinde ifade edilebileceğini frobenius (seri) yöntemi ile gösteriniz.

Çözüm 5.17 :

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+k}$ gibi bir seri çözümü önerelim ;

$$\frac{dy}{dx}=\sum_n a_n(n+k)x^{n+k-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_n a_n(n+k)(n+k-1)x^{n+k-2}$$

$$\sum_n a_n (n+k)(n+k-1)x^{n+k-2} + w^2 \sum_n a_n x^{n+k} = 0$$

$$y = x^k \sum_n a_n x^n = x^k \left(a_0 + a_n x_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right)$$

$$a.k(k-1)x^{k-2} + w^2 a_0 x^k + a_1 k\left(k+1\right)x^{k-1} + w^2 a_1 x^{k+1} + a_2 (k+2)(k+1)x^k + w^2 a_2 x^{k+2} +$$
$$+ a_3 (k+3)(k+2)x^{k+1} + w^2 a_3 x^{k+3} \cdots\cdots = 0$$

$$a_0 k(k-1)x^{k-2} + a_1 k(k+1)x^{k-1} + \left[w^2 a_0 + a_2 (k+2)(k+1)\right]x^k + \left[w^2 a_1 + a_3 (k+3)(k+2)\right]x^{k+1} +$$
$$+ \left[w^2 a_2 (k+4)(k+3)\right]x^{k+2} + \cdots\cdots = 0$$

Toplamın sıfora eşit olabilmesi için ayrı ayrı tüm katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Öyleyse ;
İndis Denklemi için;

$a_0 k(k-1) = 0$ olmalı ; $(x^{k-2} \neq 0 \;\; için)$
$a_0 \neq 0 \Rightarrow k(k-1) = 0 \rightarrow k = 0, \;\; k = 1$ olur.

$a_1 k(k+1) = 0$ olmalı ; $\left(x^{k-1} \neq 0 \;\; için\right)$
$k = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_1 k(k+1) = 0$
$k = 1 \;\; \Rightarrow \;\; a_1 1(1+1) \neq 0, \;\; \Rightarrow \;\; a_1 = 0$ olmalı

Öyleyse; k=0,1, $a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1)x^{n+k-2}}_{n=j+2} + w^2 \underbrace{\sum_{n=0} a_n x^{n+k}}_{n=j} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[a_{j+2}\left(j+k+2\right)\left(j+k+1\right) + w^2 a_j\right]x^{j+k} = 0$$

$x^{j+k} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{j+2}(j+k+2)(j+k+1) + w^2 a_j = 0$ olmalı ise;

$a_{j+2} = -w^2 \dfrac{a_j}{\left(j+k+2\right)\left(j+k+1\right)}$: Katsayılar için tekrarlama bağıntısı elde edilir.

$a_0 \neq 0 \quad ve \quad a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_5 = a_7 = \ldots\ldots\ldots = 0$
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots = 0$ olur.

k=0 için ; $a_{j+2} = -w^2 \dfrac{a_j}{(j+2)(j+1)}$

a_0 biliniyor ise ;

j=0 $\Rightarrow$ $a_2 = -w^2 \dfrac{a_0}{2.1}$

j=2 $\Rightarrow$ $a_4 = -w^2 \dfrac{a_2}{4.3} = -\dfrac{w^2}{4.3}\left(-w^2 \dfrac{a_0}{2.1}\right) = w^4 \dfrac{a_0}{4!}$

j=4 $\Rightarrow$ $a_6 = -w^2 \dfrac{a^4}{6.5} = \dfrac{w^2}{6.5}\left(w^4 \dfrac{a_0}{4!}\right) = w^6 \dfrac{a_0}{6!}$

Bu görüntü genelleştirilir ise ;

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{w^{2n} a_n}{2n!}$$

k=0 $\Rightarrow$

$$y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow$$

$$y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6$$

$$y = a.\left(1 - \frac{(wx)^2}{2!} + \frac{(wx)^4}{4!} - \frac{(wx)^6}{6!} + ...\right)$$

$y = a_0 \cos wx$ sonucu elde edilir.

k=1 $\Rightarrow$

$a_{j+2} = -w^2 \dfrac{a_j}{(j+3)(j+2)}$ ve $a_0 \neq 0$ için a_0 biliniyor ise;

j=0 $\Rightarrow$ $a_2 = -w^2 \dfrac{a_0}{3.2}$

j=2 $\Rightarrow$ $a_4 = -w^2 \dfrac{a_2}{5.4} = -\dfrac{w^2}{5.4}\left(-w^2 \dfrac{a_0}{3.2}\right) = w^4 \dfrac{a_0}{5!}$

j=4 $\Rightarrow$ $a_6 = -w^2 \dfrac{a_4}{7.6} = -w^6 \dfrac{a_0}{7!}$

Bu görüntü genelleştirilir ise;

$$a_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{a_0}{(2n+1)!}$$

$$y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^4$$

$$y = x^1 \sum_{n}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^{2n} a_0}{(2n+1)!} x^{2n}$$

$$y = a_0 \left(-x + w^2 \frac{x^3}{3!} - w^4 \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots \right) . \frac{w}{w}$$

$$y = \frac{a_0}{w} \left(-xw + \frac{(wx)^3}{3!} - \frac{(wx)^5}{5!} + \ldots\ldots \right)$$

$y = \dfrac{a_0}{w} \sin wx$ sonucuna ulaşılır.

$y_1(x) = a.\cos wx$ $\quad y_2(x) = \dfrac{a_0}{w} \sin wx$ ise;

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = a_0 \cos wx + \dfrac{a_0}{w} \sin wx$

$y = A \sin wx + B \cos wx$ Nihai denklemi elde edilerek ispat gerçekleştirilmiş olur.